ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ECOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1993

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE
OPTIONS M ET P'
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES - I.
L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M et P', comporte 4 pages.

La première partie de ce problème est consacrée à l'étude d'endomorphismes φ d'un espace vectoriel E de dimension finie dont les puissances φ^n sont bornées. La seconde partie est une illustration géométrique de l'étude faite dans la première : on y étudie un exemple de transformation géométrique d'un espace affine E de dimension 3 dans lui-même. Les résultats de la première partie sont utilisés dans la recherche des points fixes de cette transformation.

Première partie

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ (égal à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$) de dimension finie k ; on le munit d'une norme quelconque notée $\|\ \|$. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est convergente s'il existe un élément x de E tel que le réel $\|x_n - x\|$ tende vers zéro quand n tend vers l'infini. De même, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est bornée si et seulement si la suite des réels $\|x_n\|$ est bornée. Toutes les normes dans E sont équivalentes ; il est alors clair que ces définitions sont indépendantes de la norme choisie dans E.

Ces définitions s'appliquent dans l'espace $\mathfrak{L}(E)$ des endomorphismes de E. Une norme $\|\ \|$ étant choisie dans E, on peut en particulier lui associer la norme dans $\mathfrak{L}(E)$ définie par la relation :

$$\|\varphi\| = \sup\{\ \|\varphi(x)\| \mid x\in E,\ \|x\| = 1\ \}\ .$$

I.1 Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{L}(E)$. Démontrer que les trois énoncés suivants sont équivalents :

a) La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathfrak{L}(E)$.

b) Pour tout vecteur x, élément de E, la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans E.

c) Étant donnée une base $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ de E, les k suites $(\varphi_n(e_i))_{n\in\mathbb{N}}$, $1 \le i \le k$, sont convergentes dans E.

I.2 De manière analogue, trouver deux énoncés équivalents à l'énoncé suivant : la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{L}(E)$; établir l'équivalence de ces énoncés.

I.3 Soit φ un endomorphisme de E. Soit φ^n, $n\in\mathbb{N}^*$, l'endomorphisme obtenu en composant n-fois φ avec lui-même. Montrer que, si la suite $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, toutes les valeurs propres de φ sont de module inférieur ou égal à 1.

Dans les deux questions qui suivent (I.4 et I.5), φ est un endomorphisme de E tel que la suite $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

I.4 a) Soit λ une valeur propre de φ de module 1. Soit x un élément du noyau de l'endomorphisme $(\varphi - \lambda I_E)^2$, noté $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda I_E)^2$; I_E est l'endomorphisme identité de E. Calculer le vecteur $\varphi^n(x)$ en fonction du vecteur x et du vecteur y défini par $y = \varphi(x) - \lambda x$; en déduire que x est un élément du noyau de l'endomorphisme $\varphi - \lambda I_E$.
Démontrer que E est la somme directe du noyau et de l'espace image de l'endomorphisme $\varphi - \lambda I_E$.

b) Application dans le cas où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
On suppose que φ admet au moins une valeur propre de module égal à 1. Démontrer que la matrice M associée à φ dans une base appropriée s'exprime à l'aide d'une matrice diagonale D d'ordre p et, généralement, d'une matrice carrée A d'ordre k–p ; les éléments λ_i , $1 \le i \le p$ de la matrice D sont des nombres complexes de module égal à 1 ; les valeurs propres de la matrice A ont toutes un module strictement inférieur à 1. La relation liant la matrice M aux matrices D et A est :

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} .$$

D est la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p \end{pmatrix} .$$

I.5 Étude d'une suite d'endomorphismes déduits de l'endomorphisme φ.
Soit θ_n , $n\in\mathbb{N}$, l'endomorphisme défini par la relation :

(1) $$\theta_n = \frac{1}{n+1} \{ I_E + \varphi + \varphi^2 + \dots + \varphi^n \} .$$

a) On suppose que 1 n'est pas valeur propre de l'endomorphisme φ. Démontrer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathcal{L}(E)$.

b) On suppose que 1 est valeur propre de l'endomorphisme φ. Démontrer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathcal{L}(E)$ et que sa limite est un projecteur ; préciser le sous-espace vectoriel image de ce projecteur.

Deuxième partie

Illustration géométrique des propriétés précédentes.

Dans cette partie, E est un espace affine attaché à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$; considérons dans cet espace affine E quatre points O, A, B, C constituant un repère affine ; posons :

$$i = \overrightarrow{OA}\ ,\quad j = \overrightarrow{OB}\ ,\quad k = \overrightarrow{OC}\ .$$

Le couple (O ; i, j, k) est un repère de E. Désignons par :

- H le plan affine passant par les trois points A, B et C ;
- T l'ensemble des points de H qui sont des barycentres des trois points A, B et C avec des coefficients positifs ou nuls ;
- U_1, U_2, U_3 trois points de E ; leurs coordonnées dans le repère (O ; i, j, k) seront désignées par (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3) ;
- Φ l'application affine définie par les relations :

$$\Phi(O) = O,\ \Phi(A) = U_1\ ,\ \Phi(B) = U_2\ ,\ \Phi(C) = U_3\ .$$

Convention de notation : soit θ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, soit A la matrice associée à θ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$; désignons par Θ l'application affine qui fait correspondre au point de E de coordonnées (x, y, z) le point de coordonnées (X, Y, Z) définies par la relation

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

II.1 Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les trois points U_1, U_2, U_3 pour que $\Phi(H)$ soit inclus dans H.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les trois points U_1, U_2, U_3 pour que $\Phi(T)$ soit inclus dans T.

Dans toutes les questions qui suivent, on suppose que l'inclusion $\Phi(T) \subset T$ a lieu et on se propose de prouver que l'application Φ possède au moins un point fixe dans T.

II.2 Soit H_0 le plan de E parallèle au plan H et passant par O. Démontrer l'inclusion :

$$\Phi(H_0) \subset H_0.$$

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à Φ suivant la convention de notation ci-dessus ; démontrer que l'espace image de l'application $\varphi - I_{\mathbb{R}^3}$ est de dimension inférieure ou égale à 2. En déduire que l'endomorphisme φ a une valeur propre égale à 1.

II.3 On désigne par Φ^n l'application composée de Φ avec elle-même n-fois ; démontrer que les trois suites de termes généraux $\Phi^n(A)$, $\Phi^n(B)$ et $\Phi^n(C)$ sont des suites bornées dans E. En déduire que la suite des endomorphismes φ^n , $n \in \mathbb{N}^*$, est bornée dans $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^3)$.

II.4 Soit θ_n l'élément de $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^3)$ construit à partir de l'endomorphisme φ défini ci-dessus selon la relation (1) (question I.5).

a) Démontrer pour tout entier naturel n l'inclusion $\Theta_n(T) \subset T$.

b) Soit W un point quelconque de T ; démontrer que la suite de terme général $\Theta_n(W)$, $n \in \mathbb{N}$, est convergente. Soit L_W la limite de cette suite ; que dire de l'image par Φ de ce point L_W ? Soit $\mathfrak{L}$ l'ensemble des limites L_W des suites $\Theta_n(W)$ pour tout point W de T. Quelle relation simple existe-t-il entre l'ensemble $\mathfrak{I}$ des points de T invariants par Φ et l'ensemble $\mathfrak{L}$?

Étude de l'application Φ suivant la dimension de l'espace image de l'endomorphisme $\varphi - I_{\mathbb{R}^3}$.

II.5 L'espace image de l'endomorphisme $\varphi - I_{\mathbb{R}^3}$ est supposé égal au vecteur nul : $\mathrm{Im}(\varphi - I_{\mathbb{R}^3}) = \{0\}$. Quels sont les points fixes de l'application Φ contenus dans T ?

II.6 Dans cette question l'espace image de l'endomorphisme $\varphi - I_{\mathbb{R}^3}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 et le point U_1 est distinct du point A.

a) Déterminer les positions possibles des deux points U_2 et U_3 ; on discutera suivant la position du point U_1 dans T en envisageant les trois cas :
- U_1 n'appartient ni au segment [AB] ni au segment [AC] ;
- U_1 appartient au segment [AB] ;
- U_1 appartient au segment [AC].

b) L'objet de cet alinéa est l'étude des deux premiers cas définis ci-dessus.

1er cas. Déterminer l'ensemble $\mathfrak{I}$ des points de T qui sont invariants par l'application affine Φ. Démontrer que la suite des points A, $\Phi(A),\ldots,\Phi^n(A),\ldots$ est une suite convergente en calculant les coordonnées de $\Phi^n(A)$. Soit Λ le point limite de cette suite. Placer les points A, U_1, $\Phi^n(A)$ et Λ dans l'ensemble T. Démontrer que pour tout point W de T la suite $(\Phi^n(W))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente ; soit L(W) sa limite.

Soit W un point de T qui n'est pas aligné avec les points A et U_1 ; donner une construction de l'image $\Phi(W)$ en supposant connu le point U_1 dans T ; donner une construction de l'image $\Phi^n(W)$ du point W en supposant connu le point $\Phi^n(A)$ dans T. En déduire une construction du point L(W). Déduire des résultats précédents la limite de la suite $(\Theta_n(W))_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n croît indéfiniment.

2ème cas. Déterminer l'ensemble $\mathfrak{I}$ des points de T qui sont invariants par l'application affine Φ. Préciser en particulier l'intersection de cet ensemble avec le segment [AB]. En supposant connus les points U_1 et U_2 et l'ensemble $\mathfrak{I}$, construire l'image d'un point W de T par Φ.

II.7 L'espace image de l'endomorphisme $\varphi - I_{\mathbb{R}^3}$ est supposé être un espace vectoriel de dimension 2. Quels sont le ou les points fixes de l'application Φ contenus dans T ? En déduire pour tout point W de T la limite de la suite $(\Theta_n(W))_{n \in \mathbb{N}}$.

FIN DU PROBLÈME